Lección n°8: Módulos.

EPN, 2021

En esta sección haremos énfasis en los módulos, sus categorías y los funtores definidos en los mismos. La finalidad de esta lección, además de proveernos de resultados interesantes, es la de dar una base o introducción para futuras lecciones en temas como homología o topología algebraica. Empezamos recapitulando.

Definición. *Si R es un anillo entonces un R-**módulo** (por la izquierda) es un grupo aditivo abeliano M, equipado con una acción (por la izquierda) de R. Esto es, existe una función:*

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm, \end{aligned}$$

tal que para todo $m, m' \in M$ y $r, r' \in R$, las siguientes propiedades se cumplen:

(1) $r(m + m') = rm + rm'$,

(2) $(r + r')m = rm + r'm$,

(3) $(rr')m = r(r'm)$,

(4) $1m = m$.

A la categoría de todos los $R-$módulos por la izquierda la notaremos por ${}_R\mathbf{Mod}$, donde las flechas son R-mapas (o R-módulo homomorfismos), esto es $f : M \to N$ está en $\mathrm{Hom}({}_R\mathbf{Mod})$ si es que para todo $m, m' \in M$ y $r, r' \in R$

$$f(m + m') = f(m) + f(m') \quad \text{y} \quad f(rm) = rf(m).$$

De manera similar, se define la categoría $\mathbf{Mod}_R$ de módulos por derecha, que ya hemos nombrado en la segunda lección.

Observación 37. *Si R es un anillo conmutativo entonces todo R-módulo por la derecha, puede ser visto como uno por la izquierda, simplemente definiendo la acción rm, como mr. Este es el caso de $R = \mathbb{Z}$, obteniendo la categoría **Ab**. Por otro lado, si $R = k$, donde k es un campo, estaremos en $\boldsymbol{Vect}_k$.*

Así como las categorías preaditivas, que tienen hom-sets que son grupos abelianos; a las categorías que tienen hom-sets que son R-módulos se les dice **categorías modulares**.

Por ejemplo, ${}_R\mathbf{Mod}$ es una categoría modular. Esto se debe a que cada hom-set $\mathrm{Hom}(M, N)$ se puede armar de la operación

$$(r, f) \mapsto rf,$$

donde $rf : M \to N$ es la función $m \mapsto r \cdot f(m)$. Esta operación la convierte en un módulo por la izquierda.

15. Productos tensoriales

Una aplicación de los grupos libres es la importante construcción de productos tensoriales, la cual también obedece una propiedad universal. Empezamos con una definición preliminar.

Definición. *Sea R un anillo asociativo y sean A, B R-módulos por la derecha e izquierda, respectivamente.*

*Sea G un grupo aditivo abeliano, entonces una **función R-biaditiva** es una función*

$$f : A \times B \to G,$$

tal que para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $r \in R$ tenemos que

(1) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$,

(2) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$,

(3) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Definición. *Un **producto tensorial** de A y B es un grupo abeliano H, junto con una una función R-biaditiva $h : A \times B \to H$, tal que se cumple la siguiente propiedad universal:*

Para toda función R-biaditiva f y todo grupo abeliano G existe un único homomorfismo de grupo $\overline{f}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & H \arrow[dl, dotted, "\overline{f}"] \\
G &
\end{tikzcd}$$

Observación 38. *Como toda propiedad universal, se puede verificar que H es esencialmente único, de nuevo, usando el diagrama conmutativo de la definición.*

Podemos así, fijar la notación $A \otimes_R B = H$ para referirnos al producto tensorial de A y B.

Como antes, el hecho de que sea esencialmente único no implica que este objeto exista, afortunadamente, podemos construirlo.

Lema 15.1. *$A \otimes_R B$ existe para todo A y B, R-módulos por la derecha e izquierda, respectivamente.*

Demostración. Sea F el grupo abeliano libre $F(A \times B)$, es decir, es el grupo de todas las combinaciones lineales formales

$$\sum_{i \in I} z_i (a_i, b_i),$$

donde I es cualquier conjunto de índices, $z_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) \in A \times B$ y $z_i = 0$, excepto para un número finito de índices.

Ahora, consideremos S el subgrupo de F generado por todos los elemento de la forma $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$, $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$ y $(ar, b) - (a, rb)$ para todos los elementos $a \in A$, $b \in B$, $r \in R$.

Definimos, por tanto, $A \otimes_R B = F/S$ (esto es posible porque todo subgrupo de un grupo abeliano es un grupo normal) y escribimos $a \otimes b$ para referirnos al coset $(a, b) + S$. Lo anterior significa que $A \otimes_R B$ es el conjunto de todas combinaciones lineales formales

$$\sum_{i \in I} z_i (a_i \otimes b_i),$$

donde el símbolo $\otimes$ cumple que

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b,$$

$$a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b',$$

$$(ar) \otimes b = a \otimes (rb)$$

para todo $a \in A$, $b \in B$ y $r \in R$.

Prosiguiendo, definimos la flecha h como el mapa cociente $(a, b) \mapsto a \otimes b$.

Tomando $f : A \times B \to G$, una función R-biaditiva, con G un grupo abeliano arbitrario, buscamos $\overline{f}$ homomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes_R B \arrow[d, "\overline{f}"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

conmuta. Para ello, ya que F es libre en $A \times B$ entonces, usando su respectiva propiedad universal en f, tenemos que existe un único $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi \circ i = f$.

Aquí $i : A \times B \to F$ es la inclusión, esto lo escribiremos simplemente como $\varphi((a, b)) = f(a, b)$.

Como f es R-biaditivo entonces, directamente de la definición, se tiene que $S \subseteq \ker(\varphi)$. De esta última ecuación podemos asegurar que el homomorfismo que "levanta el cociente"

$$\overline{f} : F/S \to G,$$

con $\overline{f}((a, b) + S) = \varphi((a, b)) = f(a, b)$, está bien definido y,por como lo hemos hecho, hace que el diagrama requerido conmute. La unicidad de $\overline{f}$ se deja como ejercicio. $\square$

Lema 15.2. *Sea $f : A \to A'$ un R-mapa de R-módulos por la derecha y $g : B \to B'$ un R-mapa de R-módulos por la izquierda. Entonces existe un único homomorfismo*

$$A \otimes_R B \to A' \otimes_R B',$$

con $a \otimes b \to f(a) \otimes g(b)$.

Demostración. Sea la función $\varphi : A \times B \to A' \otimes_R B'$ definida por $\varphi((a, b)) \mapsto f(a) \otimes g(b)$, esta función es bilineal. Luego, usando la propiedad universal del producto tensorial, obtenemos una única flecha con las propiedades requeridas. $\square$

A esta flecha lo notaremos como $f \otimes g$.

Observación 39. *Notemos que ahora existen dos maneras de crear R-mapas, ya sea componiéndolos o haciendo su producto tensorial. Esto nos debe resonar mucho en como se tenían dos operaciones para las transformaciones naturales.*

De hecho, se puede comprobar que

$$(g' \otimes f') \circ (g \otimes f) = (g' \circ g) \otimes (f' \circ f),$$

para todo par $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ de R-mapas de R-módulos por la derecha y todo par $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$ de R-mapas de R-módulos por la izquierda.

La siguiente perspectiva es interesante: dado que, en la categoría de módulos, los hom-sets también tienen estructura de R-módulo, y dado que cada módulo se puede pensar como una categoría modular de un solo objeto, entonces podemos pensar en A, A', A'' como funtores

$$\mathscr{L} \to \mathscr{M},$$

donde $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ son categorías modulares adecuadas, de un solo objeto.

Además, aquí la composición de dos funtores $A : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ y $B : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ estará dada por el producto tensorial $A \otimes B$. Por otro lado, una transformación natural no es más que un R-mapa, por tanto, se puede pensar que la composición de dos R-mapas es, en realidad, la composición vertical de dos funtores, y el producto tensorial de dos R-mapas es la composición horizontal de dos funtores.

Luego, la ley de intercambio en 2-categorías tiene como caso particular, la relación que hemos escrito para las operaciones $\otimes$ y $\circ$.

Lema 15.3. *Si $A \in \boldsymbol{Mod}_R$, entonces existe un funtor aditivo $F :_R \boldsymbol{Mod} \to \boldsymbol{Ab}$ definido por*

$$F(B) = A \otimes_R B.$$

Si $f : B \to B'$ es un R-mapa entre dos R-módulos por la izquierda, entonces se tiene que

$$F(f) = 1_A \otimes f.$$

Similarmente, si $B \in_R \boldsymbol{Mod}$ entonces existe un funtor aditivo $G :_R \boldsymbol{Mod} \to \boldsymbol{Ab}$ con $G(A) = A \otimes_R B$.

Demostración. Notemos que $F(1_B) = 1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes_R B}$ donde la última igualdad se deduce porque $(1_A \otimes 1_B)(a \otimes b) = (a \otimes b)$, por tanto es la identidad para los generadores de $A \otimes_R B$ y así es la identidad en todo ese grupo.

F preserva la composición pues si $B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{f'} B''$ entonces

$$F(f' \circ f) = 1_A \otimes (f' \circ f) = (1_A \circ 1_A) \otimes (f' \circ f) = (1_A \otimes f') \circ (1_A \otimes f) = F(f') \circ F(f),$$

gracias a la ley de descomposición para el producto tensorial.

F es aditivo pues si $f, f' : B \to B'$ sabemos que su suma $f + f'$ está definida y además, la función $F(f + f') = 1_A \otimes (f + f')$ envía cada $a \otimes b$ al elemento $a \otimes (f + f')(b)$.

Por otro lado, $(f + f')(b) = f(b) + f'(b)$ y además, $a \otimes (f(b) + f'(b)) = a \otimes f(b) + a \otimes f'(b)$.

Por ello, se tiene que

$$F(f+f)(a\otimes b) = a\times(f+f')(b) = a\otimes f(b) + a\otimes f'(b) = (F(f)+F(f'))(a\otimes b)$$

Así es aditiva para los generadores; luego, se tiene que es aditiva para todos los elementos de $F(B) = A\otimes_R B$.

El otro resultado para el funtor G es análogo. $\square$

Es usual escribir estos funtores F y G como

$$A\otimes_R(-) \quad \text{y} \quad (-)\otimes_R B,$$

respectivamente.

Observemos que $A\otimes_R B$ es un grupo abeliano, mas no tiene una estructura de módulo. Esto no puede imponerse a menos que tengamos una hipótesis extra.

Definición. *Sea R y S anillos, entonces un grupo abeliano B se dice que es un $(R-S)$ bimódulo, notado como $B \in_R \boldsymbol{Mod}_S$, si es que es un R-módulo por la izquierda y un S-módulo por la derecha. Además, las acciones de R y S cumplen que*

$$r(bs) = (rb)s,$$

para todo $r\in R$, $s\in S$ y $b\in B$.

Observación 40. *Todo R-módulo por la izquierda, con R conmutativo, se puede armar de una estructura de $(R-R)$ bimódulo.*

Lema 15.4. *Si $A\in \boldsymbol{Mod}_R$ y $B\in_R \boldsymbol{Mod}_S$, entonces $A\otimes_R B$ es un S-módulo por la derecha, es decir, $A\otimes_R B\in \boldsymbol{Mod}_S$, donde la acción se define como*

$$(a\otimes b)s = a\otimes(bs).$$

Similarmente, si $A\in_S \boldsymbol{Mod}_R$ y $B\in_R \boldsymbol{Mod}$ entonces $A\otimes_R B\in_S \boldsymbol{Mod}$ con

$$s(a\otimes b) = (sa)\otimes b.$$

Demostración. Para todo $s\in S$, si usamos la definición de $(R-S)$ bimódulo, tenemos que la función $\hat{s}: B\to B$ definida por $\hat{s}(b) = bs$ es un R-mapa.

Si es que $F = A\otimes_R(-)$, entonces $F(\hat{s})$ debe ser un homomorfismo de grupos y, explícitamente, es la función $1_A\otimes\hat{s}$ que envía $a\otimes b$ a $a\otimes(bs)$, por tanto la operación está bien definida, más aún verifica los axiomas de módulo. El otro caso es similar. $\square$

Cuando R es conmutativo y A, B son R-módulos (ya hemos visto que, en este caso, no necesitamos especificar si lo son por la derecha o izquierda), entonces se puede probar que $A\otimes_R B$ es un R-módulo y se tiene que

$$r(a\otimes b) = (ra)\otimes b = a\otimes(rb).$$

Es así como, en el caso conmutativo, se obtiene otra propiedad universal un poco más familiar, que se considera, por ejemplo, en el caso particular del producto tensorial de espacios vectoriales.

Definición. *Si R es conmutativo y A, B, C son R-módulos, entonces una función se dice **R-bilineal**, o solo bilineal, si es que es R-biaditiva y cumple que*

$$rf(a, b) = f(ra, b) = f(a, rb),$$

para todo $a \in A$, $b \in B$ y $r \in R$.

> **Teorema 15.1.** *Si R es anillo conmutativo y A, B son R-módulo, entonces $A \otimes_R B$, junto con la inyección $h : A \times B \to A \otimes_R B$, cumplen la siguiente propiedad universal: Para todo $f : A \times B \to C$ bilineal, existe un único R-mapa $\hat{f} : A \to B$, tal que*
>
> $$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes_R B \arrow[d, "\hat{f}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Demostración. Ya que C es un R-módulo, con más razón es un grupo abeliano. De esta manera, todo f bilineal es R-biaditivo, por lo tanto podemos considerar $\overline{f} : A \otimes_R B \to C$ que se deduce de la primera propiedad universal para funciones biaditivas.

Entonces $\hat{f} := \overline{f}$ haría conmutar al diagrama requerido si podemos probar que es un R-mapa.

Observemos entonces que, por como se construyo $\overline{f}$, se cumple

$$\hat{f}(r(a \otimes b)) = f(a, b),$$

luego, usando que tenemos una estructura de R-módulo para el producto tensorial $A \otimes_R B$, se deduce que

$$\hat{f}(r(a \otimes b)) = \hat{f}((ra) \otimes b) = f(ra, b) = rf(a, b) = r\hat{f}(a \otimes b),$$

porque f es bilineal. Ahora, esto prueba lo requerido, porque hemos probado que f es un R-mapa, para los elementos generadores $a \otimes b$. $\square$

La razón por la cual es útil estudiar teoría de módulos es que provee de una teoría de representación para anillos:

Recordemos que cada R-módulo es un grupo abeliano, en donde R actúa por medio de una multiplicación

$$\sigma : R \times M \to M,$$

con $\sigma(r, m) = rm$. Ahora los axiomas de módulo, son equivalentes a que σ sea $\mathbb{Z}$-biaditiva. Pero entonces cada aplicación $\hat{r} : M \to M$ con $m \mapsto \sigma(r, m) = rm$ debe ser un homomorfismo, más aún se tiene que

$$F : R \to \mathrm{End}(M)$$

es un homomorfismo de anillo, por lo tanto podemos verlo como un funtor

$$F : \mathscr{R} \to \mathbf{Ab},$$

donde $\mathscr{R}$ es el anillo R visto como categoría de un solo elemento $\bullet$, F es un funtor aditivo y $F(\bullet) = M \in \mathbf{Ab}$.

Así, cada R-módulo induce una representación de anillo, de un grupo abeliano M.

16. Sumas y productos de módulos

Sea $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia de módulos (aquí usaremos este nombre para no escribir R-módulo por la izquierda), entonces se tiene que existe su producto y coproducto en la categoría ${}_R\mathbf{Mod}$.

Se puede verificar, de manera análoga a lo hecho en la categoría **Grp**, que se tienen las siguientes descripciones:

$$\prod_{j\in J} A_j = \{(a_j)_{j\in J}\},$$

donde la suma y producto por escalar de $(a_j)_{j\in J}$ y $(b_j)_{j\in J}$ se hacen componente a componente.

$$\coprod_{j\in J} A_j = \{(a_j)_{j\in J} \ : \ (a_j) = 0 \text{ excepto para un número finito de índices}\}$$

y tal que es un submodulo de $\prod_{j\in J} A_j$, donde por **submódulo** entendemos un subgrupo que además es cerrado bajo la multiplicación por escalar. Al coproducto en este contexto es más común llamarlo **suma**.

Es claro que, si J es finito, entonces el producto y suma de módulo coinciden.

No olvidemos, por supuesto, que estos límites vienen acompañados de proyecciones e inyecciones (coproyecciones) $p_i : \prod_{j\in J} A_j \to A_i$ y $q_i : A_i \to \coprod_{j\in J} A_j$, además de las respectivas propiedades universales que cumplen.

Teorema 16.1. *Sea B un módulo, entonces la función*

$$\theta : \mathrm{Hom}\left(\coprod_{j\in J} A_j, B\right) \to \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(A_j, B),$$

dada por $\theta(\varphi) = (\varphi \circ q_j)_{j\in J}$, es un isomorfismo.

Observación 41. *Es crucial entender que podemos hacer el producto de los hom-sets* $\mathrm{Hom}(A_j, B)$*, pues los consideramos con su estructura de módulo.*

Demostración. No es difícil observar que es un homomorfismo de grupo, gracias que las proyecciones son R-mapas.

La función θ es sobreyectiva. En efecto, sea $f \in \prod \mathrm{Hom}(A_j, B)$, entonces por la propiedad universal del coproducto o suma, se tiene que existe un $\varphi : \coprod A_j \to B$ tal que

$$\varphi \circ q_j = f_j$$

para todo $j \in J$, donde $f_j := p_j f : A_j \to B$. Por tanto, $\theta(\varphi) = (f_j)_{j\in J}$. Por otro lado, θ es inyectiva gracias a que φ es único, por la propiedad universal del coproducto. $\square$

De manera dual, tenemos el siguiente resultado que se demuestra usando repetidamente la propiedad universal del producto.

Teorema 16.2. *Sea B un módulo entonces la función*

$$\theta : \mathrm{Hom}\left(B, \prod_{j\in J} A_j\right) \to \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(B, A_j),$$

dado por $\theta(\varphi) = (p_j \circ \varphi)_{j\in J}$, es un isomorfismo.

Hemos descrito cómo los hom-funtores (se los conoce así a $\mathrm{Hom}(A, -)$ y $\mathrm{Hom}(-, A)$) se comportan con respecto al producto y suma de esta categoría. El producto tensorial también tiene buenas propiedades.

Teorema 16.3. *Sea A un R-módulo por la derecha y $\{B_j\}_{j\in J}$ un familia de R-módulos por la izquierda, entonces la aplicación:*

$$\theta : A \otimes_R \coprod_{j\in J} B_j \to \coprod_{j\in J} (A \otimes_R B_j),$$

dada por $\theta(a \otimes (b_j)_{j\in J} B_j) = (a \otimes b_j)_{j\in J}$, es un isomorfismo.

Observación 42. *Aquí es importante observar que cada $A \otimes_R B_j$ no es necesariamente un R-módulo, por tanto el coproducto de los mismos se toma en la categoría* ***Ab****.*

Demostración. No es difícil ver que la función

$$A \times \coprod_{j\in J} B_j \to \coprod_{j\in J} (A \otimes_R B_j),$$

definida por $(a, (b_j)_{j\in J}) \mapsto (a \otimes b_j)_{j\in J}$ es R-biaditiva, luego θ existe gracias a la propiedad universal del producto tensorial.

Sean las inyecciones (coproyecciones) $q_i : B_i \to \coprod B_j$ con $i \in I$, lo que buscamos ahora es encontrar un inversa para θ, para ello consideremos las funciones

$$f_i = 1_A \otimes q_i : A \otimes_R B_j \to A \otimes_R \coprod_{j\in J} B_j,$$

las cuales son homomorfismos de grupo. Notemos que podemos usar la propiedad universal de coproducto de grupos abelianos de la siguiente manera: si

$$r_i : A \otimes_R B_i \to \coprod_{j\in J} (A \otimes_R B_j)$$

son las respectivas coproyecciones, entonces existe un único homomorfismo

$$\overline{f} : \coprod_{j\in J} (A \otimes_R B_j) \to A \otimes_R \coprod_{j\in J} B_j,$$

tal que $\overline{f} r_j = f_j$ para todo $j \in J$. No es difícil verificar ahora que $\overline{f} = \theta^{-1}$ y, como ambos son homomorfismos de grupo, se tiene que θ es un isomorfismo. $\square$

17. Introducción a la homología

Otro de los usos de la teoría de módulos, es el de permitir acercarnos a las bases de la teoría de homología, la cual es una herramienta de la topología algebraica, que tiene múltiples aplicaciones tanto teóricas, como prácticas.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos $\mathbb{R}^n$ como un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$, por medio de la incrustación topológica $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Sea ahora, el conjunto

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \subset \mathbb{R}^{n+1} \ : \ t_i \geqslant 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\},$$

el cual es conocido como el **n-símplice regular**. Para $n = 0$ es un punto, para $n = 1$ es una recta, para $n = 2$ es un triangulo, para $n = 3$ es un tetraedro, etc.

Si $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces también es cierto que Δ_n es la envolvente convexa de esta base, es decir, es el conjunto convexo más pequeño que los contiene. En símbolos, $\Delta_n = \operatorname{conv}(\{v_0, \ldots, v_n\})$, pero usaremos más la notación $\Delta_n = [v_0, \ldots, v_n]$.

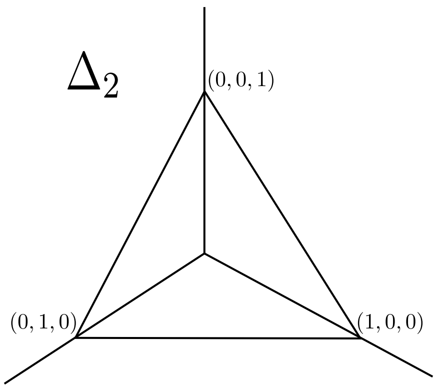


Figura 1: El 2-símplice regular es un triangulo en $\mathbb{R}^3$
tal que sus vértices son los vectores de la base canónica.

La razón del nombre "regular" es que, en general, un n-símplice es la envolvente convexa de cualesquier $n + 1$ puntos $x_0, \ldots, x_n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, tal que ninguno de estos puntos se encuentra en un mismo hiperplano. Esto significa que $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2$, $\ldots$, $x_0 - x_n$ deben ser linealmente independientes.

Por ejemplo, el segmento $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ es un 1-símplice. Sin embargo, existe un homeomorfismo desde el n-símplice regular hacia cualquier otro n-símplice. A saber, es la aplicación $(t_0, \ldots t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i t_i$. Por tanto, podemos identificar todos los n-símplices con su correspondiente símplice regular.

Dado lo anterior, no hay problema en identificar el segmento unitario $I = [0, 1]$, con Δ_1. Luego, una curva en un espacio topológico X, se define también como un aplicación continua $\sigma : \Delta_1 \to X$. Una curva cerrada será una curva σ, tal que $\sigma(0) = \sigma(1)$.

Se define la frontera de Δ_n, como

$$\bigcup_{i=0}^{n} [v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n],$$

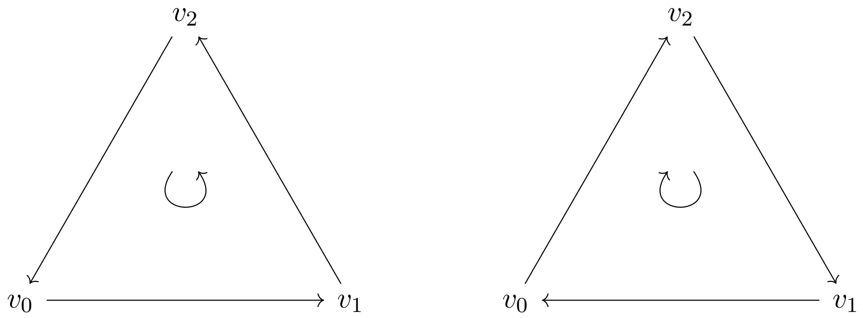
donde $\hat{v_i}$, significa que hemos eliminado ese vértice. Es decir

$$[v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n].$$

La frontera de Δ_0 es vacía, la frontera de Δ_1 son dos puntos, la frontera de Δ_2 es la unión de los segmentos de recta que unen a sus vértices.

Definición. *Una* ***orientación*** *en* Δ_n *es una permutación de sus vertices* $\{v_0, \dots, v_n\}$*. Dos orientaciones se dirán iguales si, como permutaciones, tienen la misma paridad. Caso contrario se dirán opuestas.*

Por ejemplo, la permutación identidad $(v_0, v_1, v_2) \to (v_0, v_1, v_2)$, genera una orientación en Δ_2, que se puede considerar que es antihoraria. Por otro lado, la permutación $(v_0, v_1, v_2) \to (v_1, v_0, v_2)$ genera una orientación en el sentido horario.



Podemos pensar también en una orientación como un ordenamiento de sus vertices; la primera orientación descrita nos dice que $v_0 < v_1 < v_2$; la segunda, en cambio, expresa que $v_1 < v_0 < v_2$.

Para expresar estas orientaciones en la notación, escribiremos $[v_0, \dots, v_n]$ para referirnos a que tiene la orientación determinada por la permutación identidad, caso contrario, si tiene una orientación opuesta se escribirá $-[v_0, \dots, v_n]$.

De esta manera, para tomar en cuenta, las orientaciones en la frontera se define la **frontera orientada** de Δ_n, como

$$\bigcup_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n].$$

Así, en la anterior figura, el primer 2-símplice, tiene como frontera orientada a

$$[v_0, v_1] \cup [v_1, v_2] \cup -[v_0, v_2].$$

Definición. *Un* n***-símplice en un espacio topológico*** X*, es una función continua* $\sigma : \Delta_n \to X$*.*

Observemos que el símbolo "-", usado en la orientación de símplices, es solo notación. Sin embargo, consideremos ahora el grupo $S_n(X)$, definido como el grupo libre abeliano generado por todos los $n-$símplices en X (se construye de forma análoga al grupo libre, descrito en la lección 4, pero ahora en la categoría **Ab**). Este consta de todas las sumas formales finitas

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \sigma_i$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y $\sigma_i : \Delta_n \to X$. Además $-\sigma : \Delta_n \to X$ es igual a $\sigma : -\Delta_n \to X$, donde $-\Delta_n = -[x_0, \dots, x_n]$.

Definición. *Una n-cadena es un elemento de $S_n(X)$.*

Observación 43. *Una interpretación de una n-cadena se da para $n = 1$. En este caso, cada $1-$símplice es una curva en X. En el análisis complejo (respectivamente en el análisis real), se considera a X como $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}^2$).*

Sea f una función definida en el plano complejo (resp. real) y deseamos considerar su integral de línea o de contorno

$$\oint_C f \, d\sigma,$$

donde C es alguna curva que rodea un punto x para el que f no está definido o tiene una singularidad.

Esta clase de problemas se analiza insertando otras curvas, de tal manera que la singularidad x queda englobada . Así, C se convierte en un 1-cadena.

$$C = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_2$$

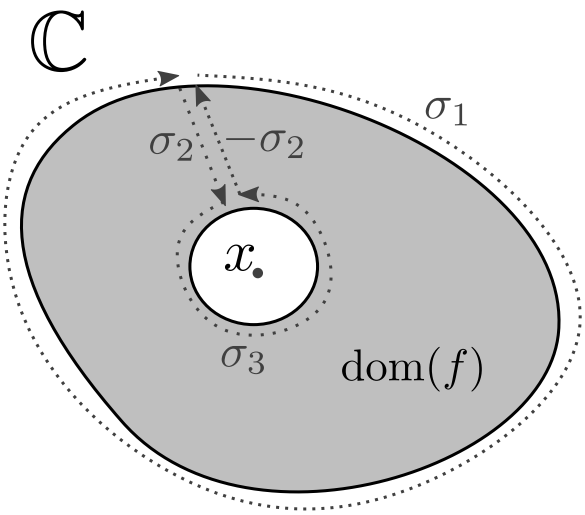


Figura 2: Una 1-cadena como la suma de curvas o caminos, considerando su orientación.

La requerida integral se estima tomando el límite cuando el diámetro del conjunto que tiene como frontera a σ_3, va hacia 0. Aquí, la orientación ha sido de gran importancia, en particular, se tiene que $\oint_{-\sigma_2} f \, d\sigma = -\oint_{\sigma_2} f \, d\sigma$. Este es el contexto en el que se desarollan los teoremas de Cauchy en análisis complejo y de Green en el análisis real. Las n-cadenas son así generalizaciones necesarias para atacar problemas similares, en dimensiones superiores o en espacios topológicos más complejos, como variedades diferenciables.

Prosiguiendo con la teoría, para σ, un n-símplice en X, quisiéramos definir una frontera (orientada). Un posible candidato es

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v_i},\ldots,v_n]}.$$

Sin embargo, ya que $\sigma \in S_n(X)$, sería deseable que la frontera pertenezca a $S_{n-1}(X)$. Esto no se tiene pues el dominio de la restricción $\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v_i},\ldots,v_n]}$ no es Δ_{n-1}, sino un $(n-1)$-símplice que es un subconjunto de Δ_n.

Se corrige lo anterior, estandarizando, por medio de las aplicaciones $s_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$; definidas como

$$s_i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).$$

Definición. *La frontera orientada de un n-símplice, σ, es la $(n-1)$-cadena*

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma s_i.$$

Notemos que hemos definido entonces una función $\partial_n : A_n(X) \to S_{n-1}(X)$ donde $A_n(X)$ es el conjunto de todos los n-símplices en X. Como $S_n(X)$ es el objeto libre en **Ab** generado a partir de $A_n(X)$; sabemos entonces, por la respectiva propiedad universal, que existe un único homomorfismo

$$\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X),$$

el cual lo podemos pensar como su extensión por linealidad. A las funciones ∂_n se les conoce como **operadores de frontera**.

Se ha construido, por tanto, una sucesión infinita de homomorfismos

$$\dots \overset{\partial_{n+1}}{\to} S_n(X) \overset{\partial_n}{\to} S_{n-1}(X) \overset{\partial_{n-1}}{\to} \dots \overset{\partial_1}{\to} S_0(X) \to 0.$$

El resto de esta sección se tratará de manera informal, sin las respectivas demostraciones; el lector interesado en las mismas, y en una exposición más detallada, se puede referir al libro "An introduction to homological algebra" de Joseph J. Rotman.

Teorema 17.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.*

Definición. *Un n-**ciclo** es un elemento de* $\ker(\partial_n)$*. Una n-**frontera** es un elemento de* $\mathrm{im}(\partial_{n+1})$*.*

Del anterior resultado es sencillo deducir que

$$\mathrm{im}(\partial_{n+1}) \subset \ker(\partial_n) \subset S_n(X).$$

Por tanto, la siguiente definición está justificada

Definición. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se define el n-**ésimo grupo de homología de** X, como el grupo cociente*

$$H_n(X) = \ker(\partial_n)/\mathrm{im}(\partial_{n+1}).$$

Adicionalmente, existe un funtor covariante H_n : **Top** $\to$ **Ab** tal que a cada objeto X, se le asigna su grupo de homología $H_n(X)$.

Similares construcciones se obtienen modificando la sucesión infinita de homomorfismos. Por ejemplo, si se considera su imagen a partir del funtor $(-) \otimes_{\mathbb{Z}} G$, donde G es un grupo abeliano, obtenemos la sucesión

$$\dots \overset{\partial_n \otimes_Z 1_G}{\longrightarrow} S_{n-1}(X) \otimes_Z G \overset{\partial_{n-1} \otimes_Z 1_G}{\longrightarrow} \dots \overset{\partial_1 \otimes_Z 1_G}{\longrightarrow} S_0(X) \otimes_Z G \to 0$$

y los respectivos grupos de homología se conocen como **grupos de homología con coeficientes en** G.

Por otro lado, si se compone con el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}}(-, G)$, se obtiene una sucesión

$$\dots \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}}(S_{n-1}(X), G) \leftarrow \dots \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}}(S_0(X), G) \leftarrow 0,$$

de donde se originan los **grupos de cohomología**.